Вероятно, читатель знаком с СТО по курсе общефиза, где были преобразования Лоренца для координат и времени. И скоростей.

И вероятно, ему СТО показалась той ещё дрянью. Формулы резко усложняются, всё усложняется, ужас и кошмар. Был Галилей, а потом пришли Лоренц и Эйнштейн. Поэтому мы начнём не с пространства-времени, а гораздо более понятной и приятной темы - 4-вектора энергии-импульса – темы данной методички.

Вот летит частица. У неё есть кинетическая энергия $E_к$ и импульс **p**.

Сразу скажем, что поблизости никаких потенциалов нет, поэтому кинетическая энергия – это и есть полная энергия частицы E с точностью до некоторой аддитивной константы (вас же не сильно напряжёт тот факт, что у тела, помимо кинетической энергии, есть ещё собственная энергия, которую мы назовём энергию покоя? ЗСЭ ведь она не нарушит!)

Зададимся вопросом: а эти величины разные в разных системах отсчёта? Конечно, разные: в системе самой частицы обе 0, в иных системах отличны от ноль, а в системе, пролетающей с бешеной скоростью мимо частиц, и вовсе зашкаливают.

Но мы замечаем: чем больше энергия, то тем больше и импульс (по модулю). Возникает гипотеза: мы можем придумать некоторую новую физическую величину, которая будет одинакова во всех системах отсчёта, и она, в виду соображения в начале абзаца, будет по типу энергия минус импульс.

Такая величина действительно есть и называется ПСЕВДОКВАДРАТОМ НОРМЫ четырёхвектора импульса (или 4-импульсом). Обозначать её в данной методе будем **<u>p</u>** (в отличие от трёхмерных векторов, которые мы будем обозначать просто жирным шрифтом, 4-вектора мы будем ещё и подчёркивать).

Что ты такое? Для начала представим вашему вниманию просто чётырёхвектор импульса: (E, p_x, p_y, p_z). Да, мы взяли и сделали новый вектор, запихнув в него и энергию, и импульс.

Теперь мы можем объединить ЗСЭ и ЗСИ в один закон: **<u>p</u>** сохраняется.

Меняется ли **<u>p</u>** при переходе в другую систему координат? Конечно: в системе самой частицы импульсная часть зануляется, а в противном случае она нулю не равна.

А вот псевдоквадрат нормы – инвариант системы координат. Чтобы его получить, нужно **<u>p</u>** псевдоскалярно умножить на само себя. Воу-воу, слишком много приставок «псевдо», надо пояснить.

Когда мы скалярно умножаем вектор из четырёх компонент (x_1, x_2, x_3, x_4) на другой вектор из четырёхкомпонент (y_1, y_2, y_3, y_4), то мы скалярным произведением называем

$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4$

А псевдоскалярным произведением (далее ПСП) назовём

$x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4$

Если квадрат нормы вектора (x1, x2, x3, x4) – это

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$,

а просто норма – это квадратный корень из этой суммы,

То псевдоквадратом нормы – это

$x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2$,

А просто норма… а она может быть мнимой, у нас же тут минусы появилось. С комплексными числами никто работать не любит, поэтому давайте оперировать лучше псевдоквадрат нормы. Для краткости в дальнейшем будем для него использовать аббревиатуру ПКН.

Упражнение для понимания. Найти ПСП векторов (2; -5, 3; 1) и (4, 3; 0; 7).

Решение: 2*4-(-5)*3-3*0-1*7=8+15-7=16.

Найти ПКН вектора (2, -5; 1; -1).

Решение: 2*2-(-5)*(-5)-1*1-(-1)*(-1)=4-25-1-1=-23.

Теперь, вооружившись знанием новой математической операцией под названием ПКН, вычислим ПКН от 4-импульса.

ПКН($\underline{\mathbf{p}}$)=$E^2-p_x^2-p_y^2-p_z^2= E^2-\mathbf{p}^2$

Становится ясно, почему нам был нужно именно псевдоквадрат: чтобы энергия и импульс были с разными знаками.

Но у нас возникают проблемы с размерностью: E и **p** разной размерности. E имеет размерность $mv^2/2$, импульс имеет размерность mv, а их отношение имеет размерность скорости.

Решать эту проблему можно по-разному. Например, можно изменить определение 4-импульса на

$(E/c,\ p_x, p_y, p_z)$

- где c – любая константа, имеющая размерность скорости. Это вовсе необязательно $3*10^8$ м/с, это может быть и скорость вашего движения в университет 3-го сентября этого года, и 1 м/с. Важно, что это некая мировая константа вроде G в законе всемирной гравитации, которая одинакова во всех системах отсчёта и которая нам нужна только для подгонки размерности.

Мы можем исправить 4-импульс и на

$(E,\ c*p_x, c*p_y, c*p_z)$

В любом случае все его компоненты будут одинаковой размерности, что даст вычисление ПКН (и вычисление псевдоскалярного произведения двух 4-импульсов разных частиц) без проблем.

В разных книжках используются разные подходы. Отдельные особо ушлые авторы (например, Фейнман) и вовсе забивают на размерность (наверняка наталкивались на фразу типа «положим c=безразмерной единице»). Автор сей методы считает это недопустимым и во всём курсе будет полагать c размерной константой.

Теперь назовём 4-импульсом вот это

p = $(E/c,\ p_x, p_y, p_z)$

А 4-энергией –

E = $(E,\ c*p_x, c*p_y, c*p_z)$.

Названия вполне логичны: в 4-импульсе все компоненты имеют размерность импульса, а 4-энергии все компоненты имеют размерность энергии.

Для любой частицы, таким образом

E = c***p**

Иллюстрация для понимания.

На ядерном праке у нас был протон. В системе отсчёта второкура протон был с энергией столько эрг и импульсом вдоль оси асбцисс столько-то г*см/с. В это время в аудитории был Евгений Вадимович, двигающийся по всем возможным осям (кроме оси аппликат, потому что полы в НИИЯФе всё же крепкие).

(давайте мы здесь будем считать протон классической частицей без всяких Гейзенбергов. Если хотите – замените протон на какое-нибудь тяжёлое ядро, оно ещё ближе к классической частице)

И второкур, и Евгений Вадимович записали энергию и импульс протона в своих координатах. Получили совершенно разные результаты, что вполне естественно, потому что двигались они с разными скоростями. Зачем оба сели свои данные обрабатывать: оба подсчитали 4-импульс для своих данных. Вновь получили разные данные (вполне может не совпадать ни одна из четырёх компонент импульса). Но вот когда они возьмут ПКН от своего 4-импульса, то результаты у них совпадут.

И, очевидно, ПКН 4-энергий у них тоже совпадут (потому что они пропорциональны c).

Т.е. это ПКН 4-импульса – это характеристика только протона в эксперименте, не зависящая от наблюдателя.

И ПКН 4-энергии – тоже.

Мы смотрим на Луну. В это время мимо Земли на летающей тарелке пролетают инопланетяне и тоже смотрят на Луну. Энергия и импульс Луны для нас и инопланетян будут совершенно разные. 4-энергия – тоже четыре пары разных чисел. А вот стоит вычислить ПКН от 4-энергии – и результаты совпадут.

В это время второкур, которого мы отправили прямиком в центр масс Луны, проделывает то же самое. Импульс Луны в его системе оказывается 0. А вот энергия… Помните, что в начале методы я сказал, что у тела, помимо кинетической энергии, может быть его собственная энергия и есть? Ну вот она и оказывается в итоге ПКН 4-энергии Луны. И её же получаем мы с инопланетянами. Ну а поделив на с, получим 4-импульс.

Эта энергия покоя в дальнейшем у нас будет часто встречаться. Обозначим её буквой W. Это функция самого тела, которая не меняется со временем. Ну как его масса, или его заряд, или квантовое число, если мы о элементарных частицах. Если у нас с инопланетянами единая база о массах покоях всех тел (ну или правило её вычисления), то 4-энергии и 4-импульсы у нас будут одинаковые.

Прежде чем мы перейдём к решению серьёзной задачи с помощью 4-импульса, мне нужно ответить на вопрос Фомы неверующего. Он не поверил мне, что ПКН 4-энергии – инвариант системы координат и решил проверить.

Он рассмотрел частицу. В её системе ПКН её самой – энергия покоя: т.к. импульс **0**, 4-энергия есть (W, 0, 0, 0), а ПКН от ней W^2. В системе, движущейся относительно частицы со скоростью v, 4-энергия равна ($mv^2/2$ + W, c*mv. 0, 0), а ПКН от неё — $(mv^2/2 + W)^2 - c^2m^2v^2$. Ясно, что это вовсе не обязано равняться W.

И вот сейчас он тычет мне бумажкой в лицо и говорит, что я затираю дичь.

Я: Фома неверующий, зачем ты использовал преобразования скоростей Галилея?

Он: А какие надо? Лоренца?

Я: Да.

Он: Они же ужас какие противные! Фу!!! С корнями!!! Разве может такая прекрасная вещь, как инвариантность ПКН 4-импульса, из них вытекать?

Я: Преобразования Лоренца, конечно, сложнее галилеевых. Но вот именно они приводят как инвариантности ПКН 4-импульса. Галилей бы никогда вам инвариантность 4-импульса не дал. Можно даже сказать иначе: Лоренц специально придумал свои преобразования так, чтобы они были инвариантом инерциальных СК.

Он: Но рассмотрим случай, когда частица движется ну совсем медленно, нерелятивистски. Тогда, казалось бы, два ПКНа должны различаться не сильно…

Я: Обосновывая инвариантность, нам всё-таки придётся подключить некоторые знания из СТО. В частности, W не абы какая, а масса тела * c^2 и много меньше v. В этом случае $(mv^2/2+W)/c$-mv как раз приблизительно равно W^2 .

Вообще если вы примете инвариантность как фундаментальный закон природы, то тогда (и только тогда) о преобразованиях Лоренца можете не думать. (Если они вам и потребуются, то они будут лишь следствием).

Давайте решим задачу. Её решает в своей книжке Фейнман (том 6, страница 250). Правда, он, как я уже сказал, забивает на размерность скорости света, поэтому я в своей методе привожу «размерное» решение. К тому же Фейнман решаёт её для конкретной ядерной реакции, я уже для общего случая.

Задача: на покоящуюся в ЛСК (лабораторной системе координат) частицу b налетает частица a с импульсом (обычным, трёхмерным) $\mathbf{p_a}$ (поэтому без подчёркивания – подчёркиваются у нас 4-векторы). Результат – они объединяются в одну частицу c.

Вопрос: при какой энергии налетающей частицы возможна такая реакция?

Запишем закон сохранения 4-энергии:

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathbf{a} + \underline{\mathbf{E}}_\mathbf{b} = \underline{\mathbf{E}}_\mathbf{c}$$

Возведём обе части в квадрат… точнее, в псевдоквадрат:

$$(\underline{\mathbf{E}}_\mathbf{a} + \underline{\mathbf{E}}_\mathbf{b})^2 = \underline{\mathbf{E}}_\mathbf{c}^{\,2}$$

(Я буду обозначать квадратом от 4-вектора именно ПКН, подсчитанный по правилу с тремя минусами, а скалярным произведением именно ПСП, подсчитанный также правилом с тремя минусами).

Распишем ПКН как ПСП:

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathbf{a}^{\,2} + 2*\underline{\mathbf{E}}_\mathbf{a} * \underline{\mathbf{E}}_\mathbf{b} + \underline{\mathbf{E}}_\mathbf{b}^{\,2} = \underline{\mathbf{E}}_\mathbf{c}^{\,2}$$

Т.к. и ПКН одного 4-вектора, и ПСП двух 4-векторов – инварианты систем координат, мы будем вычислять там, где нам будет удобно. ПКНы обычно удобно вычислять в системе частицы, там это ПКН 4-энергии – это просто энергия покоя.

(Энергия покоя частицы a)^2 + (энергия покоя частицы b)^2 + 2* $\underline{\mathbf{E}}_\mathbf{a} * \underline{\mathbf{E}}_\mathbf{b}$ = (энергия покоя частицы c)^2

$$W_a^2+W_b^2+2*\underline{\mathbf{E}}_\mathbf{a} * \underline{\mathbf{E}}_\mathbf{b} = W_c^2$$

Все энергия покоя – табличные величины.

А что, кстати, такое это $\underline{\mathbf{E}}_\mathbf{a} * \underline{\mathbf{E}}_\mathbf{b}$? Это в любой системе координат

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathbf{a} * \underline{\mathbf{E}}_\mathbf{b} = E_a*E_b - c^2\mathbf{p}_\mathbf{a}\mathbf{p}_\mathbf{b}$$

E без жирноты и подчёркивания – обычное скалярное произведение, а также обычный 3-импульс, хоть и жирный, потому что вектор, но без подчёркивания – подчёркиваются у нас 4-векторы.

Если что, тут у нас скалярное произведение уже простых старых 3-импульсов. Давайте распишу через проекции, если непонятно:

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathbf{a} * \underline{\mathbf{E}}_\mathbf{b} = E_a*E_b - c^2 (p_{ax}p_{bx} + p_{ay}p_{by} + p_{az}p_{bz})$$

ПСП – тоже инвариант системы координат. В ЛСК частица b покоится, её 3-импульс ноль. Глядим на формулу

$$\underline{\mathbf{E}}_\mathbf{a} * \underline{\mathbf{E}}_\mathbf{b} = E_a*E_b - c^2\mathbf{p}_\mathbf{a}\mathbf{p}_\mathbf{b}$$

И понимаем, что раз $\mathbf{p}_\mathbf{b}$ ноль-вектор, то

$\underline{\mathbf{E}}_\mathbf{a} * \underline{\mathbf{E}}_\mathbf{b} = E_a*E_b$ (где энергии берутся в ЛСК)

Также, т.к. b покоится, то E_b – это только её энергия покоя W_b.

$$W_a^2+W_b^2+2* E_a*W_b = W_c^2$$

Здесь все величины табличные, кроме E_a. Находим E_a, вычитаем из неё энергию покоя, получаем кинетическую энергию частицы а. PROFIT.

$$2*E_a*W_b = W_c^2-(W_a^2+W_b^2)$$

$$E_a = (W_c^2/W_b-W_a^2/ W_b-W_b)/2$$

$$Екин_a=(W_c^2/W_b-W_a^2/ W_b-W_b)/2- W_a$$

Что особенно приятно – при решении данной задачи нам не встретились ни рассмотрение нескольких случаев - частица нерелятивистская или релятивистская. Решение одно!

Единственная сложность – вместо привычных двух ЗСЭ и ЗСИ мы используем один закон (ЗС 4-энергии или 4-импульса, они идентичны с точностью до множителя с), но с фичей вроде скачками по системам координат. К этому надо просто привыкнуть. Как привыкали вы в 9 классе к новой для вас физической величине «импульс». В конце концов, на тележках, которые вы наверняка сталкивали в школе на лабораторке по ЗСИ, не написаны их импульсы на бумажке. Это наша человеческая абстракция…
Ну вот, оказывается, у тех же тележек, помимо 3-импульса, есть ещё и 4-импульс. Он не сильно сложнее 3-импульса, ну, на одну проекцию больше. Но зато какими свойствами он обладает…

В заключение замечу, что мы ввели два разных 4-вектора:

4-импульс {E/c, **p**}

4-энергия {E, **p**c}

На самом деле если бы мы немного иначе ввели единицы измерения, у нас бы вообще E и p имели одну размерность (ну как в СИ φ и A имели разную размерность, а в СГС одну). Поэтому мы в дальнейшем мы будем говорить о едином 4-векторе энергии-импульса, у которого будет два представления: {E/c, **p**} и {E, **p**c}

Чек-лист. Мы:

1) Познакомились с двумя 4-векторами: 4-импульсом и 4-энергией, которые мы объединили в один 4-вектор импульса, энергии.

2) Узнали, что такое ПСП и ПКН.

3) Узнали, что хоть 4-вектор сам по себе ни является инвариантом системы координат, инвариантами системы координат является ПКН 4-вектора и ПСП двух 4-векторов.

4) Решили задачу о неупругом столкновении двух частиц.

Вот вам мемасик для тех, кто дочитал ☺